

Table des matières

1	Interpolation et approximation	1
1.1	Approximation d'une fonction par une autre fonction	1
1.1.1	Fonctions d'approximation	1
1.1.2	Approximation polynomiale	2
1.2	Détermination des polynômes d'interpolation	3
1.2.1	Calcul du polynôme d'interpolation	3
1.2.2	Polynôme d'interpolation de Newton	4
1.2.3	Polynôme d'interpolation de Lagrange	8
1.2.4	Interpolation polynomiale avec des points régulièrement espacés	9
1.2.5	Polynômes de Hermite	12
1.2.6	Polynômes de Chebyshev et points irrégulièrement espacés	14
1.2.7	Interpolation par fonctions splines	19
1.2.8	Interpolation par des courbes splines paramétriques	25
1.3	Courbes de Bézier	26
1.4	Discussion et conclusion	27
2	Intégration numérique	29
2.1	Formules d'intégration de Newton et Cotes fermées	29
2.1.1	Intégration globale sur l'intervalle $[a, b]$	29
2.1.2	Intégration sur des sous-intervalles	32
2.2	Formules d'intégration de Newton et Cotes ouvertes	34
2.3	Conclusions sur les formules d'intégration de Newton et Cotes	35
2.4	Intégration répétée par dichotomie et intégration de Romberg	35
2.5	Intégration numérique avec des points irrégulièrement espacés	38
2.5.1	Rappels sur les polynômes orthogonaux	38
2.5.2	Quadrature de Gauss-Legendre	42
2.5.3	Quadrature de Gauss-Laguerre	46
2.5.4	Quadrature de Gauss-Chebyshev	46
2.5.5	Quadrature de Gauss-Hermite	46
2.6	Discussion et conclusion	46
3	Résolution d'équations par des méthodes itératives	49
3.1	Méthode de Graeffe	49
3.2	Méthode de Bernoulli	51
3.3	Méthode de Bairstow	54
3.4	Méthode des substitutions successives	57
3.5	Méthode de Newton et méthodes dérivées	60

3.5.1	Méthode de Newton	60
3.5.2	Méthode de la sécante	63
3.6	Méthodes de dichotomie et regula falsi	63
3.6.1	Méthode de dichotomie	64
3.6.2	Méthode regula falsi	66
3.7	Méthode d'Aitken	66
3.8	Méthode d'homotopie	68
3.8.1	Introduction	68
3.8.2	Méthode de continuation	68
3.9	Discussion et conclusion	72
4	Opérations numériques sur les matrices	75
4.1	Introduction	75
4.2	Rappels sur les matrices	75
4.3	Rappels sur les vecteurs	77
4.4	Transformations linéaires et sous-espaces	79
4.4.1	Théorème de Gershgorin	81
4.4.2	Théorème de Cayley-Hamilton et conséquences	82
4.4.3	Méthode de puissance	83
4.5	Matrices semblables et polynômes de matrices	85
4.6	Matrices symétriques et matrices hermitiennes	85
4.7	Réduction de matrices sous une forme plus simple	90
4.8	Méthode LR de Rutishauser	91
4.9	Méthode de Householder	95
4.10	Méthode QR de Francis	99
4.11	Discussion et conclusion	109
5	Résolution des systèmes d'équations algébriques	111
5.1	Introduction	111
5.2	Résolution de systèmes linéaires triangulaires	111
5.3	Résolution de systèmes linéaires : méthode d'élimination de Gauss	112
5.4	Calcul du déterminant d'une matrice	119
5.5	Algorithme de Gauss-Jordan	120
5.6	Factorisation LDL^T	123
5.7	Décomposition de Cholesky	124
5.8	Décomposition en valeurs singulières	125
5.9	Méthode des moindres carrés pour les systèmes linéaires sur-déterminés	127
5.10	Résolution itérative de grands systèmes linéaires (Jacobi, Gauss- Seidel)	129
5.11	Résolution de systèmes linéaires : cas d'une matrice tridiagonale .	133
5.12	Résolution de systèmes non linéaires : méthode de Newton-Raphson	134
5.13	Résolution de systèmes non linéaires par optimisation	137
5.14	Discussion et conclusion	137
6	Intégration numérique des équations différentielles ordinaires	139
6.1	Introduction	139
6.1.1	Equations différentielles linéaires et non-linéaires	140
6.1.2	Unicité de la solution	141
6.2	Problèmes à valeur initiale	141

6.2.1	Méthodes à un pas	142
6.2.2	Méthodes à pas multiples	157
6.2.3	Formules d'intégration ouvertes	157
6.3	Stabilité des méthodes d'intégration numérique	164
6.4	Cas des systèmes raides	167
6.5	Systèmes algébro-différentiels	168
6.6	Equations différentielles à frontières multiples	170
6.7	Discussion et conclusion	170
7	Intégration numérique des équations aux dérivées partielles	173
7.1	Quelques exemples de systèmes physiques	173
7.1.1	Transfert de chaleur par conduction	173
7.1.2	Transfert de matière	175
7.1.3	Equation des ondes	175
7.1.4	Equation de Laplace	175
7.2	Propriétés des équations aux dérivées partielles	176
7.2.1	Généralités	176
7.2.2	Problème bien posé	177
7.2.3	Classification	178
7.2.4	Caractérisation des solutions	178
7.2.5	Méthode des caractéristiques	179
7.3	Méthode des différences finies	188
7.3.1	Préambule	188
7.3.2	Discrétisation	189
7.4	Calcul automatique des dérivées partielles	205
7.4.1	Calcul de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_N$	206
7.4.2	Calcul de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_N$	207
7.5	Méthode des lignes	207
7.5.1	Cas de conditions aux limites de Dirichlet	208
7.5.2	Cas de conditions aux limites de Neumann	208
7.5.3	Simulation d'un échangeur de chaleur	209
7.6	Méthode des volumes finis	213
7.6.1	Introduction	213
7.6.2	Maillage	213
7.6.3	Intégration sur un volume de contrôle quelconque	215
7.6.4	Prise en compte des conditions aux limites à gauche	217
7.6.5	Prise en compte des conditions aux limites à droite	218
7.6.6	Cas de deux milieux solides en contact et de conductivités différentes	219
7.6.7	Résolution numérique	220
7.6.8	Problème bi-dimensionnel	223
7.6.9	Extension au cas des écoulements	224
7.6.10	Conservation appliquée à un volume de contrôle	225
7.6.11	Algorithme SIMPLER	226
7.7	Discussion et conclusion	227

8	Méthodes analytiques d'optimisation	229
8.1	Quelques rappels mathématiques	229
8.2	Introduction	230
8.3	Fonctions d'une seule variable	231
8.3.1	Intervalle infini	231
8.3.2	Intervalle fini	234
8.3.3	Présence de discontinuités	235
8.4	Fonctions de plusieurs variables	235
8.4.1	Intervalle infini	235
8.4.2	Intervalle fini	236
8.4.3	Présence de discontinuités	236
8.5	Fonction soumise à des contraintes d'égalité	236
8.5.1	Méthode de Jacobi	236
8.5.2	Multiplicateurs de Lagrange	238
8.5.3	Signification des multiplicateurs de Lagrange	240
8.5.4	Conditions de minimum	240
8.5.5	Conditions de minimum par le gradient projeté dans le cas de contraintes d'égalité	240
8.6	Fonction soumise à des contraintes d'inégalité	245
8.6.1	Utilisation de fonctions d'écart	245
8.6.2	Paramètres de Kuhn-Tucker	246
8.6.3	Conditions de minimum par le gradient projeté dans le cas de contraintes d'inégalité	250
8.7	Fonction soumise à des contraintes d'égalité et d'inégalité	255
8.8	Discussion et conclusion	256
9	Méthodes numériques d'optimisation	257
9.1	Fonctions d'une seule variable	257
9.1.1	Méthode de dichotomie	257
9.1.2	Méthode de Newton	259
9.1.3	Méthode de Fibonacci	260
9.2	Fonctions de plusieurs variables	262
9.2.1	Méthodes de recherche directe	263
9.2.2	Recherche simple monovariante	263
9.2.3	Méthode du simplexe	263
9.2.4	Méthodes d'accélération	265
9.2.5	Méthode du complexe de Box	269
9.2.6	Algorithme génétique	271
9.2.7	Méthodes de gradient	274
9.2.8	Méthode de la plus grande pente	280
9.2.9	Problème de la recherche dans une direction \mathbf{s} donnée	281
9.2.10	Méthode des gradients conjugués	284
9.2.11	Méthode de Newton-Raphson	291
9.2.12	Méthode de quasi-Newton	296
9.2.13	Méthodes pour les sommes de carrés	299
9.2.14	Méthode de Gauss-Newton	301
9.2.15	Méthode de Levenberg-Marquardt	302
9.2.16	Approximation de quasi-Newton	304
9.2.17	Systèmes d'équations non linéaires	306
9.3	Discussion et conclusion	306

10 Programmation linéaire	307
10.1 Généralités	307
10.2 Formulation du problème à partir d'exemples	308
10.2.1 Utilisation de variables d'écart	308
10.2.2 Utilisation de variables d'écart et de variables artificielles	309
10.2.3 Conditions d'optimalité	311
10.3 Résolution du problème, tableau du simplexe	311
10.3.1 Interprétation géométrique, exemple 1	311
10.3.2 Tableau du simplexe avec variables d'écart et artificielles, exemple 2	317
10.4 Solution théorique	319
10.5 Cas de contraintes simultanées d'inégalité et d'égalité	323
10.6 Dualité	327
10.6.1 Exemple de dualité	327
10.6.2 Démonstration du théorème de dualité	328
10.7 Méthodes de point intérieur	333
10.7.1 Méthode de projection de Karmarkar	333
10.7.2 Transformation affine	338
10.8 Discussion et conclusion	342
11 Optimisation quadratique et non linéaire	345
11.1 Introduction	345
11.2 Optimisation quadratique, conditions de Kuhn-Tucker et résolution par le simplexe	346
11.2.1 Première présentation	346
11.2.2 Deuxième présentation	346
11.2.3 Solution sous forme d'un problème de simplexe	346
11.3 Optimisation quadratique, méthode de barrière	348
11.4 Optimisation non linéaire par optimisation quadratique successive	352
11.4.1 Introduction	352
11.4.2 Notion de région possible et de cône tangent	353
11.4.3 Optimisation quadratique successive	354
11.4.4 Spécificités et difficultés du problème SQP	358
11.5 Discussion et conclusion	364
12 Exercices	365
12.1 Interpolation et approximation	365
12.2 Intégration numérique	372
12.3 Résolution d'équations par des méthodes itératives	375
12.4 Opérations numériques sur les matrices	380
12.5 Résolution des systèmes d'équations algébriques	383
12.6 Intégration numérique des équations différentielles ordinaires	391
12.7 Intégration numérique des équations aux dérivées partielles	399
12.8 Méthodes analytiques d'optimisation	402
12.9 Méthodes numériques d'optimisation	411
12.10 Programmation linéaire	418
12.11 Optimisation quadratique et non linéaire	425